Corrigé

1. a. Pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} - \dfrac{2u_n + v_n}{3}$ $= \dfrac{3u_n + 9v_n - 8u_n - 4v_n}{12} = \dfrac{5}{12}(v_n - u_n)$.

   b. Pour tout entier naturel n, on a $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{5}{12}(v_n - u_n) = \dfrac{5}{12}w_n$.

   Donc la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{5}{12}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$.

   Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $w_n = w_0 \times q^n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$.

2. a. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n + v_n}{3} - u_n = \dfrac{2u_n + v_n - 3u_n}{3}$

   $= \dfrac{-u_n + v_n}{3} = \dfrac{w_n}{3}$.

   Or, comme pour tout entier naturel n, $w_n = w_0 \times q^n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$, on en déduit que $w_n \geqslant 0$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et donc la suite (u_n) est croissante.

   Pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \dfrac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4}$ $= \dfrac{u_n - v_n}{4} = \dfrac{-w_n}{4}$

   Or, comme pour tout entier naturel n, $w_n \geqslant 0$, alors $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$.

   Donc la suite (v_n) est décroissante.

   b. Comme la suite (v_n) est décroissante, pour tout entier naturel n, on a $v_n \leqslant v_0$ c'est-à-dire $v_n \leqslant 10$. Or, pour tout entier naturel n, on a $w_n \geqslant 0$ c'est-à-dire $v_n - u_n \geqslant 0$ d'où $v_n \geqslant u_n$. On a donc $u_n \leqslant v_n \leqslant 10$ c'est-à-dire $u_n \leqslant 10$.

   Comme la suite (u_n) est croissante, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant u_0$ c'est-à-dire $u_n \geqslant 2$. Or, pour tout entier naturel n, on a $v_n \geqslant u_n$ d'où $v_n \geqslant u_n \geqslant 2$ c'est-à-dire $v_n \geqslant 2$.

   c. La suite (u_n) est croissante et majorée par 10 donc elle converge vers un réel ℓ.

   La suite (v_n) est décroissante et minorée par 2 donc elle converge vers un réel ℓ'.

3. Pour tout entier naturel n, on a $w_n = v_n - u_n$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell' - \ell$.

   Or, comme $\dfrac{5}{12} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{12}\right)^n = 0$ et donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

   On en déduit alors que $\ell' - \ell = 0$ c'est-à-dire $\ell = \ell'$.

4. a. Pour tout entier naturel n, on a $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1}$
$= 3 \times \dfrac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \dfrac{u_n + 3v_n}{4} = 3u_n + 4v_n = t_n$.
Donc la suite (t_n) est constante égale à $3u_0 + 4v_0 = 6 + 40 = 46$.
b. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 46$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 3\ell + 4\ell = 7\ell$ par opérations sur les limites.
D'où $7\ell = 46 \Leftrightarrow \ell = \dfrac{46}{7}$.